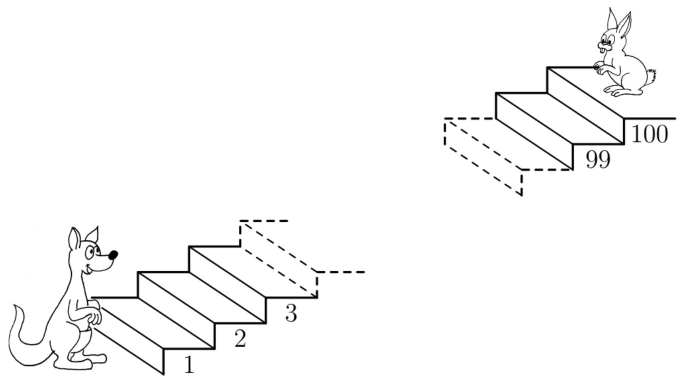
Soluciones Primer Concurso de Resolución de Problemas, 2021

Quinto y Sexto Básico

1. Cada vez que el canguro sube 7 escalones el conejo baja 3 escalones.

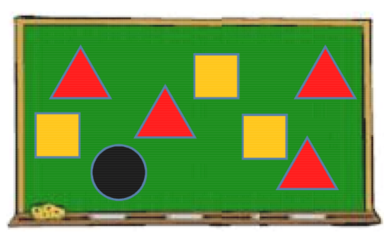


¿En qué escalón se encuentran ambos?

Solución

Como están a una distancia de 100 escalones, cada vez que el canguro sube 7 escalones el conejo baja 3, significa que se han acercado en total $7 + 3 = 10$ escalones. Cuando se encuentren quiere decir que se han acercado el total de 100 escalones. Para que ambos se encuentren deben realizar el proceso inicial 10 veces. Por lo tanto, el canguro se encontrará en el escalón número $7+7+7+7+7+7+7+7+7+7 = 70$ y el conejo se encontrará en el mismo escalón $(100-3-3-3-3-3-3-3-3-3-3 = 70)$.

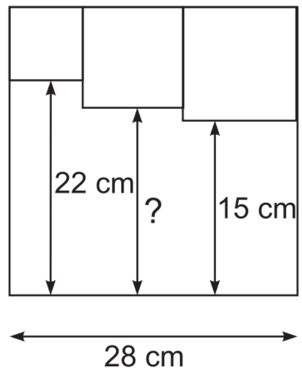
2. Los números del 1 al 8 fueron escritos en la pizarra. El profesor los cubrió con triángulos, cuadrados y un círculo. Si se suman los cuatro números cubiertos por triángulos resulta 10. Si se suman los tres números cubiertos por los cuadrados resulta 20. ¿Cuál es el número cubierto por el círculo?



Solución

Si se suman todos los números en la pizarra resulta $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$. Como la suma de todos los números excepto el cubierto por el círculo es $10+20 = 30$, el número cubierto por el círculo debe ser $36-30 = 6$.

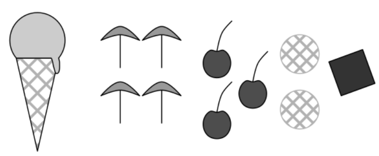
3. Tres cuadraditos pequeños se dibujan dentro de un cuadrado grande como se muestra en la figura. ¿Cuál es la medida del segmento con el signo de interrogación?



Solución

El lado del cuadradito más pequeño mide $28 - 22 = 6$ cm. El lado del cuadradito más grande mide $28 - 15 = 13$ cm. El lado del cuadradito del medio mide entonces $28 - 6 - 13 = 9$ cm. Así, el segmento pedido mide $28 - 9 = 19$ cm.

4. 10 personas compran un cono de helado cada una: 4 de vainilla, 3 de chocolate, 2 de limón y 1 de mango. Cubren los conos con un tipo de adorno: 4 sombreritos, 3 cerezas, 2 galletas y 1 de chocolate. Usan un adorno por cada cono, de forma que no hay dos conos iguales (del mismo sabor y con el mismo adorno). ¿Cuál de las siguientes combinaciones **no** es posible?



(A) chocolate con cereza (B) mango con sombrerito (C) vainilla con sombrerito (D) limón con galleta (E) vainilla con chocolate

Solución

Cada uno de los conos de vainilla debe tener un adorno distinto, luego nos quedan 3 sombreritos, 2 cerezas y una galleta. Además cada cono de chocolate debe tener una salsa distinta por lo que nos quedan 2 sombreritos y una cereza. Por lo tanto no es posible una combinación de helado de limón con galleta.

5. Decimos que un número de 3 dígitos es *agradable* si el dígito central es mayor que la suma de los otros dos dígitos. ¿Cuál es la mayor cantidad de números agradables consecutivos?

Solución

Para que la mayor sucesión ocurra, el dígito central debe ser el mayor posible por lo que debe ser 9. Los otros dos dígitos deben comenzar con la menor suma posible de ellos, por lo tanto, el primer número de la sucesión será 190. Desde 190 hasta 197 son todos agradables. Ésta es la mayor sucesión posible y contiene 8 números.

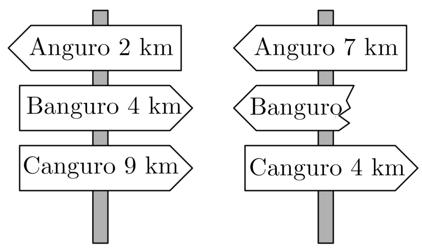
6. Javier viaja durante 3 horas diarias para ir a la escuela en autobús y volver a su casa caminando. Si va en autobús en ambos sentidos, viaja durante 1 hora. ¿Cuánto tiempo le lleva si camina en ambos sentidos?

   Solución

   Si en autobús en ambos sentidos viaja durante 1 hora, entonces de su casa a la escuela viaja 0.5 horas = 30 minutos en autobús. Como Javier viaja durante 3 horas diarias para ir a la escuela en autobús y volver a su casa caminando, entonces demora 2.5 horas caminando, así que de ida y regreso demorará 5 horas.

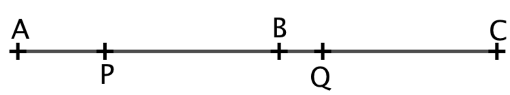
Séptimo y Octavo Básico

1. En el país de la matemática hay 3 ciudades Anguro, Banguro, Canguro. El camino más corto desde Anguro a Canguro atraviesa Banguro. Las dos señales indicadas aparecen a lo largo de este camino. ¿Qué distancia estaba escrita en el cartel roto?



   Solución

   Sin perdida de generalidad digamos que Anguro (A) está a la izquierda de Canguro (C), en la siguiente figura se muestra el camino desde A hasta C atravesando Banguro (B). El primer letrero está ubicado a la izquierda de B, digamos que en el punto P. El segundo letrero está ubicado a la derecha de B en el punto Q.



   Como $BC = PC - PB = 9 - 4 = 5$km. y $QC = 4$ km, concluimos que la distancia escrita en el cartel roto es $BQ = 1$ km.

2. Ana quiere caminar 5 km en promedio cada día en el mes de marzo (31 días). A la hora de acostarse el 16 de marzo, se dio cuenta de que ya había caminado 95 km hasta ahora. ¿Qué distancia necesita caminar en promedio los días restantes del mes para lograr su objetivo?

   Solución

   Si Ana quiere caminar en promedio 5 km cada día en el mes de marzo, en total debe caminar $31 \cdot 5 = 155$ km en este mes. Como hasta el 16 de marzo había caminado 95 km, le faltaba por recorrer 60 km en los 15 días restantes, es decir, necesita caminar en promedio $60/15 = 4$ km los días restantes.

3. Doce cubos de colores están dispuestos en una fila. Hay 3 cubos azules, 2 cubos amarillos, 3 cubos rojos y 4 cubos verdes, pero no en ese orden. Hay un cubo amarillo en un extremo y un cubo rojo en el otro extremo. Los cubos rojos son todos vecinos. Los cubos verdes también son todos vecinos. El décimo cubo desde la izquierda es azul. ¿De qué color es el sexto cubo desde la izquierda?

   Solución

   Según el enunciado podemos ubicar algunos de los cubos de la siguiente manera:

Rojo	Rojo	Rojo							Azul		Amarillo
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°

   Como los cuatro cubos verdes son vecinos, estos se deben ubicar entre la cuarta y novena posición, luego en la sexta y séptima posición obligatoriamente hay un cubo verde.

4. Elena quiere pasar 18 días consecutivos visitando a su abuela. Su abuela le lee cuentos los martes, sábados y domingos. Si Elena quiere escuchar la mayor cantidad de cuentos de su abuela, ¿en qué día de la semana debería comenzar su visita?

   Solución

   Sabemos que $18 = 14 + 4$, esto corresponde a 2 semanas y 4 días, sabemos que en 2 semanas escuchará 8 cuentos, luego lo importante es como Elena debe elegir los 4 días restantes. Como la abuela no lee cuentos 4 días seguidos, a lo más puede escuchar 22 cuentos cuando su visita comienza el día sábado.

5. El salario de Vicente es el 20 % del salario de su jefe. ¿En qué porcentaje el salario de su jefe es mayor que el salario de Vicente?

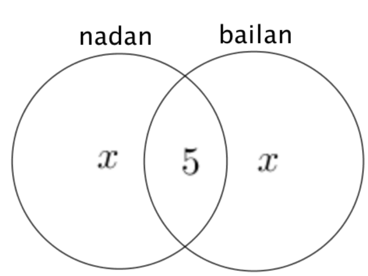
   Solución

   Sea J el salario del jefe de Vicente, entonces el salario de Vicente es $0,2J$, es decir el salario del jefe y de vicente están en la razón
   $$\frac{1}{0,2} = \frac{500}{100}$$
   Es decir, el salario del jefe de Vicente es el 500 % del salario de vicente, por lo tanto es 400 % mayor.

6. Cada alumno en una clase nada o baila. Tres quintos de la clase nadan y tres quintos bailan. Cinco alumnos nadan y bailan. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

   Solución

   A partir del enunciado se deduce que el número de alumnos que nada es igual al número de alumnos que baila, sea x el número de alumnos que solamente nada, luego podemos representar la situación usando el siguiente diagrama:



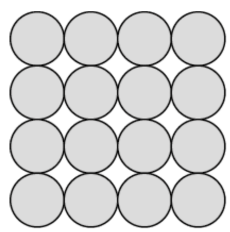
Luego, en la clase hay $x + 5 + x = 2x + 5$ alumnos, como tres quintos de la clase nadan, se tiene que:

$$\frac{3}{5}(2x + 5) = x + 5$$

Resolviendo la ecuación se obtiene que $x = 10$ concluyendo que hay 25 estudiantes en la clase.

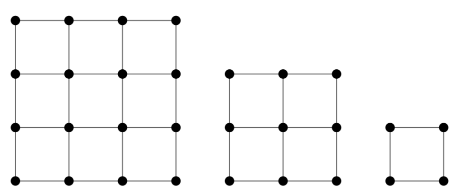
Primer y Segundo Medio

1. Claudia construye una pirámide de base cuadrada con esferas de metal. La base cuadrada consta de 4×4 esferas como se muestra en la figura. Los pisos siguientes constan de 3×3 esferas, 2×2 esferas y una esfera final en la parte superior. En cada punto de contacto entre dos esferas, se coloca una gota de pegamento. ¿Cuántas gotas de pegamento colocará Claudia?



Solución

En la siguiente figura se muestran las tres primeras capas de la pirámide, donde cada punto representa una esfera y cada segmento que une un par de puntos representará una gota de pegamento,



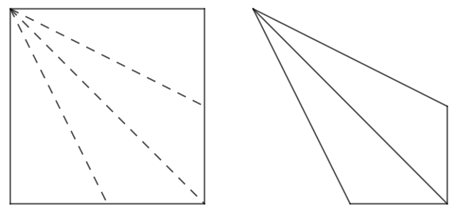
En la primera capa hay 4 filas y 4 columnas de 3 gotas cada una, teniendo $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ gotas. En la segunda capa hay 3 filas y 3 columnas de 2 gotas cada una, teniendo $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ gotas. En la tercera capa hay 2 filas y 2 columnas de 1 gotas cada una, teniendo $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ gotas. Notemos que también hay una cuarta capa con una sola bola.

Ahora contaremos las gotas para unir las capas. Para poner la cuarta capa sobre la tercera capa, como la bola superior tiene 4 puntos de contacto con las esferas inferiores, basta con poner 4 gotas sobre la esfera de la cuarta capa. Para poner la tercera capa sobre la segunda capa basta con poner 4 gotas sobre cada esfera de la tercera capa, es decir, $4 \cdot 4 = 16$ gotas. Para poner la tercera capa sobre la segunda capa basta con poner 4 gotas sobre cada esfera de la segunda capa, es decir, $4 \cdot 9 = 36$ gotas.

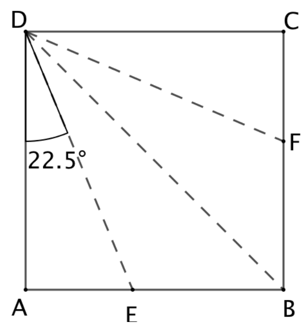
Concluimos que necesitamos:

$$(24 + 12 + 4) + (4 + 16 + 36) = 96 \text{ gotas}$$

2. Susana tomó un pedazo de papel cuadrado y dobló dos de sus lados hacia la diagonal para obtener un cuadrilátero, como se muestra. ¿Cuál es el tamaño del ángulo más grande del cuadrilátero?



Solución



Al doblar el papel, AD queda sobre la diagonal DB, los ángulos $\angle BDE$ y $\angle EDA$ se superponen, luego estos ángulos son congruentes, como la suma de dichos ángulos es 45° se deduca que:

$$\angle BDE \cong \angle EDA = 22,5^\circ$$

Como $\angle DEB$ es exterior al triángulo AED, se tiene que $\angle DEB = 90 + 22,5 = 112,5$.

3. ¿Cuántos números n de cuatro dígitos hay, de modo que la mitad de n es divisible por 2, su tercera parte es divisible por 3, y su quinta parte es divisible por 5?

Solución

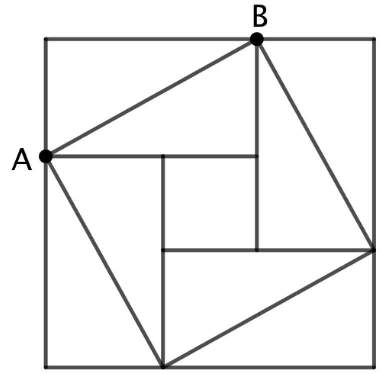
Si la mitad de n es divisible por 2, entonces $\frac{n}{2} = 2k$.

Si su tercera parte es divisible por 3, entonces $\frac{n}{3} = 3l$.

Si su quinta parte es divisible por 5, entonces $\frac{n}{5} = 5m$.

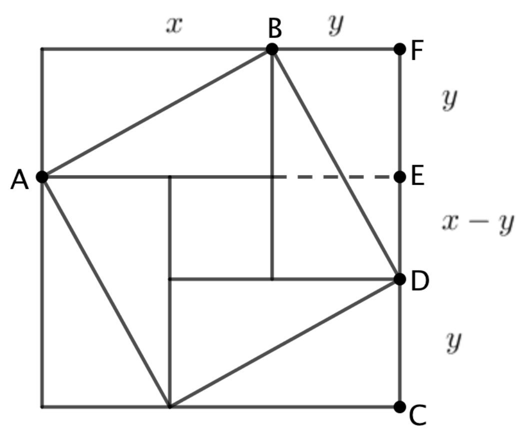
Luego $n = 4k = 9l = 25m$ como 4, 9 y 25 no tienen divisores en común, n es múltiplo de cada uno de ellos, es decir, $n = 4 \cdot 9 \cdot 25p = 900p$, como n es un número de 4 dígitos, $p = 2, 3, \dots 11$, es decir, hay 10 números que cumplen la condición.

4. Un cuadrado grande consta de cuatro rectángulos idénticos y un cuadrado pequeño. El área del cuadrado grande es de 49 cm^2 y la longitud de la diagonal de cada uno de los rectángulos es de 5 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado pequeño?



Solución

Digamos que el largo cada rectángulo es x y el ancho es y, con estas variables podemos construir la siguiente figura:



Necesitamos saber el área del cuadrado pequeño, es decir necesitamos saber el valor de $(x-y)^2$. Como el área del cuadrado es 49 cm^2 tenemos que su lado mide 7 cm, luego:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 49$$

Como la diagonal del rectángulo mide 5 cm, por el teorema de pitágoras se tiene que:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera, se tiene que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2xy &= 49 \\ 25 + 2xy &= 49 \\ 2xy &= 24 \end{aligned}$$

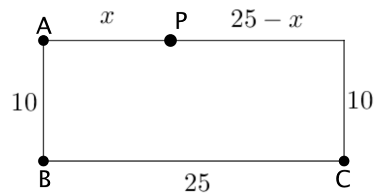
Ahora se tiene que el área del cuadrado pequeño es

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \\ &= 25 - 24 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Obteniendo que el área del cuadrado pequeño es 1 cm^2

5. Cuatro niños están en las cuatro esquinas de una piscina de 10×25 m^2. Su entrenador está de pie en algún lado a un lado de la piscina. Cuando los llama, tres niños caminan la distancia más corta posible alrededor de la piscina para encontrarse con él. Si los tres niños caminan 50 m en total, ¿cuál es la distancia más corta que el entrenador necesita caminar para llegar al cuarto niño?

Solución



Sea P el punto donde está ubicado el entrenador y A el niño más cercano a el, luego, A camina x metros, B camina $10 + x$ metros, C camina $10 + (25 - x)$ metros y D camina $25 - x$ metros. Notemos que en total caminan $x + 10 + x + 35 - x + 25 - x = 70$ metros, si tres de los niños caminan 50 m en total, entonces el cuarto niño necesita caminar $70 - 50 = 20$ m para llegar al entrenador.

6. Ana, Boris y Carlos corrieron una carrera. Comenzaron al mismo tiempo, y sus velocidades eran constantes. Cuando Ana terminó, a Boris le faltaban 15 m por correr y a Carlos le faltaban 35 m por correr. Cuando Boris terminó a Carlos le faltaban 22 m para correr. ¿Cuál es la distancia que corrieron?

Solución

Notemos que en el primer instante Carlos estaba a 35 m de la meta y Boris a 15 m, desde este instante Boris recorrió 15 m y llegó a la meta, mientras Carlos recorrió 13 m y quedó a 22 m de la meta. Como los corredores avanzan a velocidad constante, podemos decir que por cada 15 m que avanza Boris, Carlos avanza 13 m.

Sea $15z$ la distancia total de la carrera, entonces cuando Boris terminó la carrera Carlo habia avanzado $13z$, es decir le faltaba por recorrer una distancia de $15z - 13z = 2z$, luego $2z = 22$ m, es decir $z = 11$, concluyendo que la distancia total de la carrera es $15z = 15 \cdot 11 = 165$ m.

Tercer y Cuarto Medio

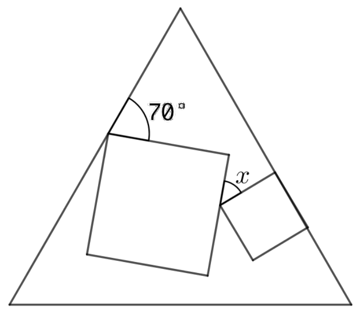
1. Los dígitos del 1 al 9 están dispuestos aleatoriamente para formar un número N de 9 dígitos. ¿Cuál es la probabilidad que el número resultante sea divisible por 18?

Solución

Como $18 = 9 \cdot 2$ sabemos que un número es divisible por 18 si es divisible por 9 y 2 a la vez, un número es divisible por 9 si la suma de sus dígitos es multiplo de 9 y es divisible por 2 si termina en cifra par.

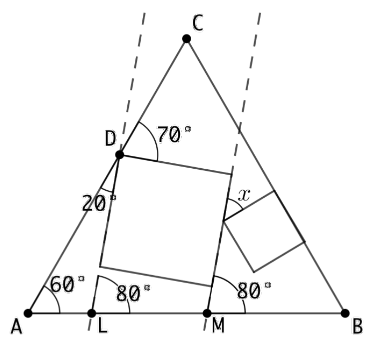
Como los dígitos del 1 al 9 suman 45 sabemos que el número N es divisible por 9, luego solo falta que su última cifra sea par, como 4 de los 9 dígitos son pares, la probabilidad que el número resultante es divisible por 18 es $\frac{4}{9}$.

2. Dos cuadrados de diferentes tamaños se dibujan dentro de un triángulo equilátero. Un lado de uno de estos cuadrados se encuentra en uno de los lados del triángulo como se muestra en la figura. ¿Cuál es la medida del ángulo x?



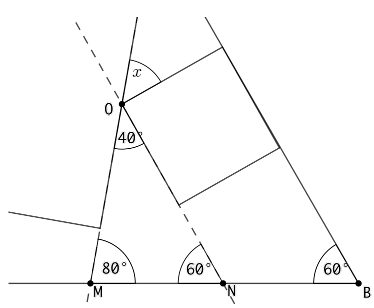
Solución

Como el triángulo es equilátero, sus ángulos interiores miden 60°, si prolongamos los lados del cuadrado mayor se generan dos rectas paralelas que cortan a la base del triángulo en los puntos L y M como se muestra en la figura.



Como el ángulo $\angle ADL = 180° - 70° - 90° = 20°$ y el ángulo en el vértice A mide 60°, sabemos que el ángulo $\angle DLM = 60° + 20° = 80°$. Como las rectas trazadas son paralelas, el ángulo en M también mide 80°.

Si prolongamos los lados del cuadrado menor se genera una recta paralela a uno de los lados del triángulo.



Como el ángulo en el vértice B mide 60°, y las prolongaciones de los lados son paralelas, el ángulo en N también mide 60°. Por lo tanto el ángulo exterior en O al triángulo MNO es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes, es decir:

$$x + 90° = 80° + 60°$$

Obteniendo que $x = 50°$.

3. Lucas comenzó un viaje de 520 km en automóvil con 14 litros de combustible en el estanque de su automóvil. Su automóvil consume 1 litro de combustible cada 10 km. Eduardo condujo 55 km, y encontró una señal de transito que muestra las distancias desde ese punto hasta Cinco estaciones de servicio en la carretera. Estas distancias son 35 km, 45 km, 55 km, 75 km y 95 km. La capacidad del tanque de combustible del automóvil es de 40 litros y Lucas quiere detenerse solo una vez para llenar el estanque. ¿A qué distancia está la estación de servicio en la que debe detenerse?

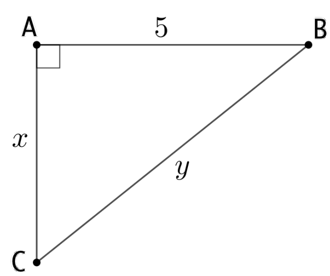
   Solución

   Como el estanque tiene 14 litros y su automóvil consume 1 litro de combustible cada 10 km, entonces puede recorrer $14 \cdot 10 = 140$ km. Como Lucas ya recorrió 55 km tiene combustible para $140 - 55 = 85$ km, por lo que debe cargar combustible en la estación que está a 75 km, o sea despues de recorrer 130 km en total. En dicha estación puede llenar el estanque con 40 litros que serán suficientes para recorrer los 390 km restantes.

4. Una liebre y una tortuga compitieron en una carrera de 5 km a lo largo de una línea recta. La liebre es cinco veces más rápido que la tortuga. La liebre comenzó por error perpendicular a la ruta. Después de un rato se dio cuenta de su error y corrió directamente hacia la meta llegando al mismo tiempo que la tortuga. ¿Cuál es la distancia entre el punto de giro de la liebre y el punto final?

   Solución

   Digamos que en la siguiente figura la carrera es desde A hasta B.



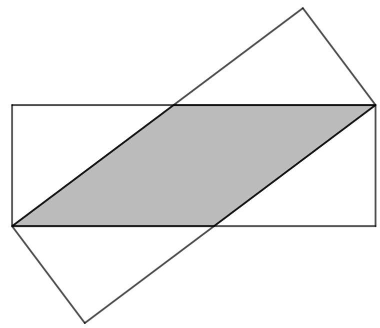
   Como la liebre es 5 veces más rápida que la tortuga ella debe recorrer $5 \cdot 5 = 25$ km para llegar a la meta junto a la tortuga. Digamos que la tortuga recorre x km de manera perpendicular a la ruta y luego recorre y km para llegar a la meta, de este modo sabemos que $x + y = 25$, es decir $x = 25 - y$.

   Luego,usando el teorema de Pitágoras se tiene la siguiente ecuación:

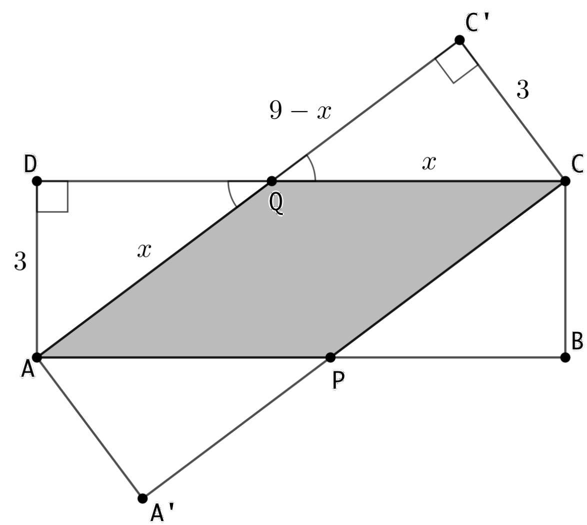
$$\begin{aligned} 5^2 + x^2 &= y^2 \\ 25 + (25 - y)^2 &= y^2 \\ 25 + 625 - 50y + y^2 &= y^2 \\ 650 &= 50y \\ y &= 13 \end{aligned}$$

   Siendo 13 km la distancia entre el punto de giro de la liebre y el punto final.

5. Dos rectángulos idénticos con lados de 3 cm y 9 cm de longitud se superponen como en el diagrama. ¿Cuál es el área de la superposición de los dos rectángulos?



Solución



Notemos que $AD = CC' = 3$, $\angle AQD = \angle C'QC$ (opuestos por el vértice) y el ángulo en D es igual al ángulo en C', luegos los triángulos ADQ y $CC'Q$ son congruentes, por lo tanto $QC = AQ = x$ y $QC' = 9 - x$.

Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo QCC' se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 &= (9-x)^2 + 3^2 \\ x^2 &= 81 - 18x + x^2 + 9 \\ 18x &= 90 \\ x &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Luego el área del cuadrilátero que se genera en la superposición es el producto entre la base x y la altura 3, es decir su área es $5 \cdot 3 = 15$ cm^2.

6. Hay dos dados. Cada uno tiene dos caras rojas, dos caras azules y dos caras blancas. Si rodamos ambos dados juntos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos muestren el mismo color?

Solución

Sean los eventos R_n = obtener rojo en el lanzamiento n, A_n = obtener azul en el lanzamiento n y B_n = obtener blanco en el lanzamiento n, luego debemos calcular:

$$\begin{aligned}
P(R_1) \cdot P(R_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) + P(B_1) \cdot P(B_2) =& \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\
=& \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \\
=& \frac{1}{3} \cdot 1 \\
=& \frac{1}{3}
\end{aligned}$$